

۱- بسط تابع $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)}$ را در نواحی زیر بیابید:
 a) $|z| < 1$, b) $1 < |z| < 2$, c) $|z| > 2$, d) $|z-2| > 1$, e) $0 < |z-2| < 1$

۲- بسط تابع $f(z) = \frac{1}{z(z-2)}$ را در نواحی a) $0 < |z| < 2$, b) $|z| > 2$ بیابید

۳- الف) تابع $f(z) = e^{\frac{z}{z-2}}$ را حول $z = 2$ بسط دهید. ب) ناحیه همگرایی سری را مشخص کنید. نوع قطب را تعیین کنید

۴- بسط لوران توابع زیر حول نقطه $z = 0$ را بنویسید

a) $z^3 e^{\frac{1}{z}}$, b) $\frac{1 - e^z}{z^3}$, c) $\frac{1}{z} \sin^2 \frac{2}{z}$

۵- بسط در ناحیه مشخص شده:

$\frac{1}{(z+1)(z^2+1)}$, a) $1 < |z| < 4$, b) $|z| > 4$,

$f(z) = \frac{1}{z^2+1}$, $0 < |z-i| < 2$

$f(z) = \frac{2}{z^2-1}$, $1 < |z+2| < 3$

۶- نوع قطبهای زیر را مشخص نمایید:

a) $\frac{1}{1 - \sin z}$, b) $e^{\frac{1}{z+2}}$, c) $\frac{1}{e^{-z}+1} + \frac{1}{z^2}$, d) $\frac{z}{z^5 + 2z^4 + z^3}$
 e) $(z-1)e^{\frac{1}{z-1}}$

۷- مقدار باقیمانده را در قطب های توابع زیر محاسبه نمایید:

a) $f(z) = \frac{1}{z-1} e^{\frac{1}{z}}$, b) $f(z) = \cos(z) \sin\left(\frac{1}{z}\right)$, c) $f(z) = z^2 \sin\left(\frac{1}{z+1}\right)$
 d) $f(z) = e^{\frac{1}{z^2}} \cos(z)$, e) $f(z) = \cos\left(\frac{1}{z}\right) + z^3$, f) $f(z) = e^{z^2 + \frac{1}{z^2}}$

۸- مطلوبست محاسبه انتگرالهای زیر:

a) $\oint_{|z-i|=\frac{3}{2}} \frac{1}{z^2+1} dz$, b) $\oint_{|z|=2} \frac{e^z-1}{z^2+1} dz$, c) $\oint_{|z|=2} \frac{1}{z-1} \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz$
 d) $\oint_{|z+1|=4} \frac{z}{e^z+3} dz$, e) $\oint_{\frac{x^2+y^2}{9}=\frac{1}{4}} \frac{\cos\left(\frac{z}{2}\right)}{z^2-4} dz$, f) $\oint_{|z|=\frac{1}{3}} (z+1)e^{\frac{1}{z}} dz$

$$\begin{aligned}
 g) \oint_{|z|=\frac{3}{2}} (\sin(\frac{1}{z^2}) + e^{z^2} \cos(z)) dz, \quad h) \oint_{|z-1|=1} (\sin(\frac{z}{z-1}) + \frac{|z-1|^2}{\bar{z}-1} \\
 + z^3 e^z) dz, \quad j) \oint_{|z|=1} (\frac{\bar{z}^2}{z^2} + \frac{z^2}{\bar{z}^2} + \cos(z) + \tan(\pi z)) dz \\
 h) \oint_{|z-i|=2} (z \cot(z) + \frac{z-i}{\bar{z}+i} + \frac{1}{z^2 \cosh(z)}) dz \\
 i) \oint_{|z|=3} (z-1)^3 \cos(\frac{z}{z-1}) dz
 \end{aligned}$$

۹- با محاسبه $\oint_{|z|=1} e^z dz$ نشان دهید:

$$a) \int_0^{2\pi} e^{\cos(\theta)} \cos(\theta + \sin(\theta)) d\theta = \int_0^{2\pi} e^{\cos(\theta)} \sin(\theta + \sin(\theta)) d\theta = 0$$

$$b) \int_0^{2\pi} e^{\cos(\theta)} \cos(\sin(\theta)) d\theta = 0, \quad c) \int_0^{2\pi} e^{\cos(\theta)} \sin(\sin(\theta)) d\theta = 2\pi$$

$$d) \int_0^{2\pi} e^{\cos(\theta)} \cos(n\theta - \sin(\theta)) d\theta = \frac{2\pi}{n!}, \quad n \text{ عددی صحیح مثبت}$$

۱۰- محاسبه انتگرال های حقیقی

$$a) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 \cos(2x)}{x^2 - 2x + 1} dx, \quad b) \int_0^{\infty} \frac{\cos(x)}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx, \quad c) \int_0^{\infty} \frac{x \sin(x)}{x^4 + x^2 + 1} dx$$

$$d) \int_0^{2\pi} \frac{\cos(x)}{\sin(x) + 2\cos(x)} dx, \quad e) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^6 + 1}$$

$$f) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2\cos(\theta) + a^2}, \quad 0 < a < 1$$

$$g) \int_0^{2\pi} \frac{\cos(3\theta)}{5 - 4\cos(\theta)} d\theta, \quad h) \int_0^{\infty} \frac{\sin \frac{x}{2}}{x(x^6 + 1)} dx$$

۱۱- نشان دهید

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a + \sin^2 x} dx = \frac{\pi}{2\sqrt{a(a+1)}}, \quad |a| > 1$$

۱۲- اگر f روی ناحیه $D = \{z \mid |z| < 2\}$ تحلیلی باشد، نشان دهید:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) dt = 2f(0) + f'(0)$$

۱۳- اگر f روی ناحیه $D = \{z \mid |z| < 1\}$ تحلیلی باشد، مطلوبست محاسبه

$$\int_0^{2\pi} \frac{-2f(e^{i\theta}) \sin(\theta)}{2i(e^{2i\theta} - 1)f'(0)} d\theta$$

۱۴- فرض کنید تابع f روی ناحیه $D = \{z \mid |z| \leq R\}$ تحلیلی و معادله $f(z) = c$ درون ناحیه فوق دارای

جواب منحصر بفرد و غیر تکراری z_0 (یا یک صفر ساده) باشد. نشان دهید z_0 از فرمول زیر به دست

می آید:

$$z_0 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=R} \frac{zf'(z)}{f(z) - c} dz$$